IV. Tensoren

IV.1 Drehungen und Matrizen

betrachte 2 Koordinatensysteme:

alt: $\{\vec{e}_i \,,\; i=1,2,3\}$

neu: $\{\vec{f}_i \equiv \vec{e}_i{}' \,,\; i=1,2,3\}$

$$\vec{r} = \vec{e}_1 x + \vec{e}_2 y + \vec{e}_3 z \doteq \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \underline{r}$$

$$\overset{!!}{=} \qquad\qquad \neq$$

$$\vec{r} = \vec{f}_1 x' + \vec{f}_2 y' + \vec{f}_3 z' \doteq \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \underline{r}'$$

seien vollständige Orthonormalsysteme (VONS)

Berechne Komponenten $\underline{a}' = (a_1', a_2', a_3')$ aus $\underline{a} = (a_1, a_2, a_3)$ für $\vec{a}$

im Fall einer Drehung $\{\vec{e}_i\} \xrightarrow{D} \{\vec{f}_j\}$

$$\underline{a}' = \begin{pmatrix} a_1' \\ a_2' \\ a_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{f}_1 \cdot \vec{a} \\ \vec{f}_2 \cdot \vec{a} \\ \vec{f}_3 \cdot \vec{a} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{f}_1 \cdot (\vec{e}_1 a_1 + \vec{e}_2 a_2 + \vec{e}_3 a_3) \\ \vec{f}_2 \cdot (\vec{e}_1 a_1 + \vec{e}_2 a_2 + \vec{e}_3 a_3) \\ \vec{f}_3 \cdot (\vec{e}_1 a_1 + \vec{e}_2 a_2 + \vec{e}_3 a_3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{f}_1 \cdot \vec{e}_1 a_1 + \vec{f}_1 \cdot \vec{e}_2 a_2 + \dots \\ \vec{f}_2 \cdot \vec{e}_1 a_1 + \vec{f}_2 \cdot \vec{e}_2 a_2 + \dots \\ \vec{f}_3 \cdot \vec{e}_1 a_1 + \vec{f}_3 \cdot \vec{e}_2 a_2 + \dots \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \vec{f}_1 \cdot \vec{e}_1 & \vec{f}_1 \cdot \vec{e}_2 & \vec{f}_1 \cdot \vec{e}_3 \\ \vec{f}_2 \cdot \vec{e}_1 & \vec{f}_2 \cdot \vec{e}_2 & \vec{f}_2 \cdot \vec{e}_3 \\ \vec{f}_3 \cdot \vec{e}_1 & \vec{f}_3 \cdot \vec{e}_2 & \vec{f}_3 \cdot \vec{e}_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \underbrace{\mathbb{D}}_{\text{Drehmatrix}} \cdot \underline{a} \quad \text{mit } \mathbb{D} = (D_{jk}) = (\vec{f}_j \cdot \vec{e}_k) \qquad (4.1)$$

· definiert Anwendung von Matrix auf Spalten:
Skalarprodukte „Zeile mal Spalte"

· ist linear: $D(\lambda \underline{a} + \mu \underline{b}) = \lambda(D\underline{a}) + \mu(D\underline{b})$

$$(\lambda D + \mu D')\underline{a} = \lambda(D\underline{a}) + \mu(D'\underline{a})$$

mit $(D + D')_{jk} = D_{jk} + D'_{jk}$

· in D stehen beide Basissysteme

$$D = \begin{pmatrix} \text{---} \; \underline{f_1} \; \text{---} \\ \text{---} \; \underline{f_2} \; \text{---} \\ \text{---} \; \underline{f_3} \; \text{---} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} | & | & | \\ \underline{e_1} & \underline{e_2} & \underline{e_3} \\ | & | & | \end{pmatrix}$$

in alter Basis — in neuer Basis

also $\vec{f}_j = D_{jk}\,\vec{e}_k$ (4.1')

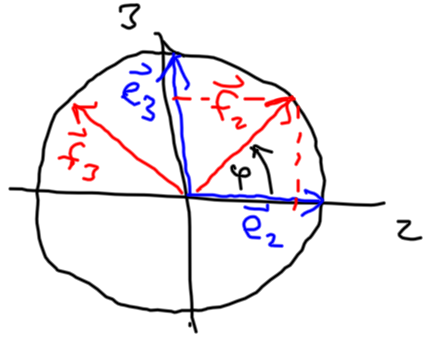
kürzer in Index-Schreibweise:

Winkel $\measuredangle(\vec{f}_j, \vec{e}_k)$

$a'_j = D_{jk}\, a_k$ mit $D_{jk} = \vec{f}_j \cdot \vec{e}_k = \cos\varphi_{jk}$ (4.1'')

Matrixelemente

einfachste Fall: Drehung um x-Achse, Winkel φ



$\vec{f}_1 = \vec{e}_1$, $\vec{f}_2 = \vec{e}_2 \cos\varphi + \vec{e}_3 \sin\varphi$

$\vec{f}_3 = -\vec{e}_2 \sin\varphi + \vec{e}_3 \cos\varphi$

$\vec{f}_1 \cdot \vec{e}_i = \delta_{1i}$ $\quad \vec{f}_2 \cdot \vec{e}_2 = \cos\varphi = \vec{f}_3 \cdot \vec{e}_3$

$\vec{f}_2 \cdot \vec{e}_3 = \sin\varphi = -\vec{f}_3 \cdot \vec{e}_2$ $\quad \vec{f}_i \cdot \vec{e}_1 = \delta_{i1}$

$$\rightsquigarrow D_{x,\varphi} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c & s \\ 0 & -s & c \end{pmatrix} \quad \text{mit} \begin{cases} c = \cos\varphi \\ s = \sin\varphi \end{cases}$$

zyklisch vertauschen $1 \to 2 \to 3 \to 1$

$$D_{y,\varphi} = \begin{pmatrix} c & 0 & -s \\ 0 & 1 & 0 \\ s & 0 & c \end{pmatrix}, \quad D_{z,\varphi} = \begin{pmatrix} c & s & 0 \\ -s & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad (4.2)$$

allgemeiner Fall: Drehung um Achse $\vec{n}$, Winkel φ

läßt sich zusammensetzen aus D_x, D_y, D_z ...

Zusammensetzen von Drehungen:

$$\begin{tikzcd} \{\vec{e}_j\} \arrow[r, "D^{(1)}"] \arrow[rr, bend right, "D"'] & \{\vec{f}_k\} \arrow[r, "D^{(2)}"] & \{\vec{g}_\ell\} \end{tikzcd}$$

$\vec{a}$: $\quad \underline{a} \qquad \underline{a}' \qquad \underline{a}''$

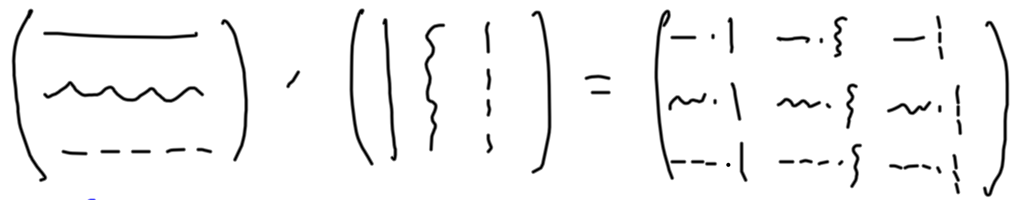
$$\underline{a}'' = D^{(2)}\underline{a}' \quad \text{und} \quad \underline{a}' = D^{(1)}\underline{a} \quad \leadsto \quad \underline{a}'' = D^{(2)}\left(D^{(1)}\underline{a}\right) = \overbrace{\left(D^{(2)}D^{(1)}\right)\underline{a}}^{D\,\underline{a}}$$

in Elementen:

$$a''_\ell = D^{(2)}_{\ell k}\, a'_k = D^{(2)}_{\ell k}\, \underbrace{D^{(1)}_{kj}\, a_j} =: D_{\ell j}\, a_j \,, \quad \text{also:}$$

$$D_{\ell j} = D^{(2)}_{\ell k}\, D^{(1)}_{kj} \quad \text{oder} \quad D = D^{(2)}D^{(1)} \qquad (4.3)$$

bildlich:



Eigenschaften:
$$(\lambda A + \mu B)\cdot C = \lambda A\cdot C + \mu B\cdot C$$
$$(A\cdot B)\cdot C = A\cdot(B\cdot C) \qquad \text{„Ring"}$$
$$A\cdot B \neq B\cdot A$$

Weitere Operationen mit Matrizen:

• Transponieren: Spiegeln an der Diagonalen

$$(A^T)_{jk} = A_{kj} \qquad \text{i.a. } A^T \neq A, \quad (A^T)^T = A \qquad \text{(4.4)}$$

speziell: $A^T = A$ „symmetrisch" (6 El.)

$A^T = -A$ „antisymmetrisch" (3 El.)

jede Matrix: $A = \frac{1}{2}\underbrace{(A + A^T)}_{\text{sym.}} + \frac{1}{2}\underbrace{(A - A^T)}_{\text{antisym.}}$, $(AB)^T = B^T A^T$ (4.5)

• Invertieren: Matrix-Operation rückgängig machen

„neutrale Operation": $\underline{a}' = E\underline{a} \overset{!}{=} \underline{a} \rightsquigarrow E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathbb{1}$

Einheitsmatrix $E_{ij} = (\mathbb{1})_{ij} = \delta_{ij}$ $\qquad E \cdot A = A = A \cdot E$

Inverses A^{-1}: $\underline{a}'' = A^{-1}\underline{a}' = A^{-1}A\underline{a} \overset{!}{=} \underline{a} \rightsquigarrow A^{-1}A = \mathbb{1}$ (4.6)

oder $AA^{-1} = \mathbb{1}$, und $(A^{-1})^{-1} = A$

A^{-1} existiert nicht immer! z.B.: $N = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ hat kein N^{-1}

$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ (4.7) weil $\mathbb{1} = AB \cdot (AB)^{-1} \overset{(4.7)}{=} A\underbrace{B B^{-1}}A^{-1} = AA^{-1}$ ✓

Determinante

$$|A| = \det A = \varepsilon_{ijk} A_{1i} A_{2j} A_{3k} = \qquad (4.8)$$

$$= A_{11} A_{22} A_{33} + A_{12} A_{23} A_{31} + A_{13} A_{21} A_{32}$$
$$- A_{11} A_{23} A_{32} - A_{12} A_{21} A_{33} - A_{13} A_{22} A_{31}$$

Spatprodukt der Zeilen oder der Spalten von A

Eigenschaft:

- $|\lambda A| = \lambda^3 |A|$ (4.9) • $|\mathbb{1}| = 1$
- $\left| \begin{pmatrix} d_1 & * & * \\ 0 & d_2 & * \\ 0 & 0 & d_3 \end{pmatrix} \right| = d_1 \cdot d_2 \cdot d_3$
- $|A|$ wechselt Vorzeichen beim Vertauschen zweier Zeilen oder Spalten
  ↪ $|A| = 0$ falls 2 Zeilen oder Spalten zueinander proportional
- $|AB| = |A| \cdot |B|$ (4.10) aber $|A+B| \neq |A| + |B|$
- $|A^T| = |A|$ (4.11) • $|A^{-1}| = |A|^{-1}$ (4.12)

Spur („Trace")

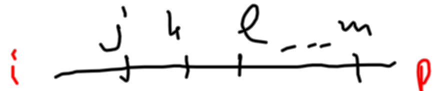
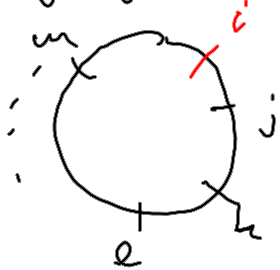
$$\mathrm{Sp}(A) = \delta_{ij} A_{ij} = A_{ii} = A_{11} + A_{22} + A_{33} \qquad (4.13)$$

Eigenschaften:

- $\mathrm{sp}(AB) = \mathrm{sp}(BA) \neq \mathrm{sp}(A) \cdot \mathrm{sp}(B) \qquad (4.14)$
- $\mathrm{sp}\left(A^{(1)} A^{(2)} \cdots A^{(n)}\right) = \mathrm{sp}\left(A^{(2)} A^{(3)} \cdots A^{(n)} A^{(1)}\right)$ zyklisch

weil $A^{(1)}_{ij} A^{(2)}_{jk} A^{(3)}_{kl} \cdots A^{(n)}_{mp} = \left(A^{(1)} A^{(2)} \cdots A^{(n)}\right)_{ip}$

$$\longrightarrow \mathrm{sp}\left[A^{(1)} A^{(2)} \cdots A^{(n)}\right] = A^{(1)}_{ij} A^{(2)}_{jk} \cdots A^{(n)}_{mi}$$

sp () = 

- $\mathrm{sp}(\mathbb{1}) = 3$
- $\mathrm{Sp}(\lambda A) = \lambda\, \mathrm{sp}(A) \qquad (4.15)$
- $\mathrm{Sp}(A+B) = \mathrm{sp}(A) + \mathrm{sp}(B) \qquad (4.16)$
- $\mathrm{Sp}(A^T) = \mathrm{sp}(A) \qquad (4.17)$

$\mathrm{sp}(A^{-1}) = ?$

Drehmatrizen sind speziell, angeg. durch 3 Größen

- Wann ist Matrix eine Drehmatrix?
- Welche Beziehungen $D \rightleftarrows \vec{n}, \varphi$ (Achse, Winkel)

$$\delta_{jl} \overset{\text{VONS}}{=} \vec{f}_j \cdot \vec{f}_l \overset{(4.1')}{=} (D_{jk}\vec{e}_k) \cdot (D_{lm}\vec{e}_m) = D_{jk} D_{lm} \vec{e}_k \cdot \vec{e}_m$$

$$\overset{\text{VONS}}{=} D_{jk} D_{lm} \delta_{km} = D_{jk} D_{lk} = D_{jk} (D^T)_{kl} = (D D^T)_{jl}$$

$\rightsquigarrow D D^T = \mathbb{1}$ „Orthogonalität"

$\Longleftrightarrow D^T D = \mathbb{1} \Longleftrightarrow D^{-1} = D^T$ (4.18)

man sagt: $D \in O(3)$ „orthogonale 3x3 Matrizen"

damit gilt: (4.19)

$\underline{a} = D^T \cdot \underline{a}'$ mit $(D^T)_{jk} = \vec{e}_j \cdot \vec{f}_k \Longleftrightarrow a_j = (D^T)_{jk} a'_k = a'_k D_{kj}$

$\rightsquigarrow$ Rechtsmultiplikation der Zeile $\underline{a}^T = (a_1, a_2, a_3)$ mit D:

$\underline{a}^T = (D^T \cdot \underline{a}')^T = \underline{a}'^T \cdot D$ (4.19')

Basisvektoren: $\vec{e}_j = (D^T)_{jk} \vec{f}_k = \vec{f}_k D_{kj}$ (4.20)

Skalarprodukt ist drehinvariant

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = \underline{a}^T\underline{b} \xrightarrow{D} \underline{a}'^T\underline{b}' = (D\underline{a})^T(D\underline{b}) = \underline{a}^T \underbrace{D^T D}\, \underline{b} = \underline{a}^T\underline{b}$$

$$\vec{a} = \vec{e}_j a_j \overset{(4.28)}{=} \vec{f}_k D_{kj} a_j \overset{(4.11)}{=} \vec{f}_k a'_k = \vec{a}$$

eine Drehmatrix hat 3 unabhängige Parameter

- Determinante einer Drehmatrix

$$1 = \det(\mathbb{1}) \overset{(4.18)}{=} \det(DD^T) = \det D \cdot \det D^T = (\det D)^2$$

$\rightsquigarrow$ $\det D = +1$ (Drehung) (4.21) oder $= -1$ (Drehspiegelung)

Spiegelung, z.B. $S_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ oder $S_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

jede Drehspiegelung läßt sich schreiben als $S\cdot D$ mit $\det S = -1$ & $\det D = +1$. Also

• Drehachse $\vec{n}$ aus D

$$D\underline{n} = \underline{n} \qquad (4.22)$$ Spezialfall eines Eigenwert-Problems

$\Leftrightarrow \quad (D - \mathbb{1})\cdot\underline{b} = 0$, normiere $\underline{n} = \underline{b}/b$

dafür muß $\det(D-\mathbb{1}) = 0$ sein.

Beispiel: $D = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & \sqrt{2} \\ 1 & 1 & -\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} \qquad \mathbb{1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

$$0 = (D-\mathbb{1})\cdot\underline{b} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 & \sqrt{2} \\ 1 & -1 & -\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & \sqrt{2} & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -b_1 + b_2 + \sqrt{2}\, b_3 \\ b_1 - b_2 - \sqrt{2}\, b_3 \\ -\sqrt{2} b_1 + \sqrt{2}\, b_2 - 2 b_3 \end{pmatrix}$$ ab-hängig

2 Glgn! $\left\{ \begin{array}{l} b_1 - b_2 - \sqrt{2}\, b_3 = 0 \\ -b_1 + b_2 - \sqrt{2}\, b_3 = 0 \end{array} \right\} \leadsto \left\{ \begin{array}{l} b_3 = 0 \\ b_1 = b_2 \end{array} \right\} \leadsto \underline{b} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \leadsto \underline{n} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

• Drehwinkel φ aus D (hier: nur $\cos\varphi$)

$D_{\vec{n},\varphi} = D_0^T D_{z\varphi} D_0$ wobei $D_0 : \vec{n} \to \vec{e}_z = \vec{e}_3$ dreht

$$\mathrm{sp}(D_{\vec{n},\varphi}) = \mathrm{sp}(D_0^T D_{z,\varphi} D_0) = \mathrm{sp}(D_0 D_0^T D_{z,\varphi}) = \mathrm{sp}(D_{z,\varphi}) = 1 + 2\cos\varphi$$

$$\leadsto \quad \mathrm{sp}(D_{\vec{n},\varphi}) = 1 + 2\cos\varphi \qquad (4.23)$$

Rekonstruktion von D aus $\tilde{n}$ & φ

$\vec{n} \doteq (u, v, w)$ $\qquad u^2+v^2+w^2=1$ $\qquad c = \cos\varphi\,,\ s = \sin\varphi$

$$D = \cos\varphi \cdot \mathbb{1} + (1-\cos\varphi)\cdot(\underline{n}\circ\underline{n}) - \sin\varphi\cdot(\underline{n}\times\ldots)$$

$$\doteq c\cdot\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix} + (1-c)\begin{bmatrix}u^2&uv&uw\\vu&v^2&vw\\wu&wv&w^2\end{bmatrix} - s\cdot\begin{bmatrix}0&-w&v\\w&0&-u\\-v&u&0\end{bmatrix} \qquad (4.24)$$

Beweis: (4.24) gilt in speziellem Bezugssystem, z.B. $\tilde{n} = \vec{e}_3$

$$D_{z,\varphi} \overset{?}{\doteq} c\cdot\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix} + (1-c)\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{bmatrix} - s\begin{bmatrix}0&-1&0\\1&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}c&s&0\\-s&c&0\\0&0&1\end{bmatrix} \quad \checkmark$$

Bemerkung: engere Physiker-Definition von Vektoren präzisei

$\vec{a} = \vec{e}_i a_i$ heißt Vektor $\Longleftrightarrow$ $a'_j = D_{jk}\, a_k$ unter Drehung

(4.25) $\qquad \{\vec{e}_i\} \longrightarrow \{\vec{f}_i = D_{jk}\,\vec{e}_k\}$

IV.2 Tensorbegriff

Komponenten		Objekte	
Zahl	a	Skalar (Tensor 0. Stufe)	a
Tripel	$\underline{a} = (a_i) = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ Spalte $\underline{a}^T = (a_1, a_2, a_3)$ Zeile	Vektor (Tensor 1. Stufe)	$\vec{a} = \vec{e}_i a_i$
Matrix	$A = (A_{ij}) = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix}$	Tensor (2. Stufe)	$\hat{A} = \hat{e}_{ij} A_{ij}$
$\vdots$			
Schema	$T = (T_{j_1 j_2 j_3 \dots j_n})$	Tensor n-ter Stufe	$\hat{T} = \hat{e}_{j_1 j_2 \dots j_n} T_{j_1 j_2 \dots j_n}$

allg. Definition:

Schema $(T_{j_1 \dots j_n})$ definiert Tensor n-ter Stufe

$$\hat{T} \doteq (T_{j_1 \dots j_n}) \iff T'_{j_1 j_2 \dots j_n} = D_{j_1 k_1} D_{j_2 k_2} \cdots D_{j_n k_n} T_{k_1 k_2 \dots k_n} \quad (4.26)$$

unter Drehung $\{\vec{e}_i\} \to \{\vec{f}_j = D_{jk} \vec{e}_k\}$

Kurzschreibweise: $T' = DD\cdots D\cdot T$

Tensor $\hat{T}$ ändert sich nicht bei Koordinatendrehung:

$$\hat{T} = \hat{e}_{j_1 j_2 \cdots j_n} T_{j_1 j_2 \cdots j_n} = \hat{f}_{k_1 k_2 \cdots k_n} T_{k_1 k_2 \cdots k_n}$$

Kann Tensor (2. Stufe) als lin. Abbildung interpretieren:

$w_j = A_{jk} v_k$ soll als aktive Operation

$\hat{A} : \vec{v} \longmapsto \vec{w} = \hat{A} \cdot \vec{v}$ gelesen werden

also $\hat{A} \doteq (A_{jk})$ im VONS $\{\vec{e}_i\}$

dann liegt $\hat{A} \doteq (A'_{jk})$ im gedrehten VONS $\{\vec{f}_i\}$ fest:

$w'_j = A'_{jk} v'_k$

$$\begin{tikzcd} \underline{v} \arrow[r, "A"] \arrow[d, "D"'] & \underline{w} \arrow[d, "D"] \\ \underline{v}' \arrow[r, "A'"] & \underline{w}' \end{tikzcd}$$

ausgeschrieben:

$$w'_j = D_{jl} w_l = D_{jl} A_{lk} v_k = D_{jl} A_{lk} (D^T)_{km} v'_m$$

$$= (D_{jl} D_{mk} A_{lk}) v'_m \stackrel{!}{=} A'_{jm} v'_m$$

$$\rightsquigarrow A'_{jm} = D_{jl} D_{mk} A_{lk} = D_{jl} A_{lk} (D^T)_{km} \Leftrightarrow A' = DAD^T \quad (4.27)$$

$\rightsquigarrow \; sp(A') = sp(A) \quad \& \quad \det(A') = \det(A)$

$$\rightsquigarrow \; \underline{w}' = A' \cdot \underline{v}' = DA\underbrace{D^T \cdot D}\underline{v} = DA\underline{v} = D\underline{w}$$

Kovarianz

Matrix A definiert auch eine Bilinearform:

$$B(\vec{u}, \vec{v}) = \underline{u}^T \cdot A \cdot \underline{v} = u_j A_{jk} v_k = \vec{u} \cdot \hat{A} \cdot \vec{v} \qquad (4.28)$$

Vertauschen der Argumente:

$$B(\vec{v}, \vec{u}) = \underline{v}^T \cdot A \cdot \underline{u} = (A^T \underline{v})^T \cdot \underline{u} = \underline{u}^T (A^T \underline{v}) = \underline{u}^T A^T \cdot \underline{v}$$

gleiche Argumente $\rightsquigarrow$ quadratische Form:

$$Q(\vec{u}) = B(\vec{u}, \vec{u}) = \vec{u} \cdot \hat{A} \cdot \vec{u} = \underline{u}^T \cdot A \underline{u} = u_j A_{jk} u_k$$

Dyadisches Produkt / Tensorprodukt

$\vec{a} \circ \vec{b}$ = Tensor 2. Stufe = „Operator" (Dyade)

Def.: $(\vec{a} \circ \vec{b})_{ij} = a_i b_j$ (4,29)

$$\vec{a} \circ \vec{b} \doteq \begin{pmatrix} a_1 b_1 & a_1 b_2 & a_1 b_3 \\ a_2 b_1 & a_2 b_2 & a_2 b_3 \\ a_3 b_1 & a_3 b_2 & a_3 b_3 \end{pmatrix} = \underline{a} \cdot \underline{b}^T = \begin{pmatrix} \vdots \end{pmatrix} \cdot (\cdots)$$

Wirkung auf Vektoren:

$(\vec{a} \circ \vec{b})_{ij} c_j = a_i b_j c_j \iff (\vec{a} \circ \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} (\vec{b} \cdot \vec{c})$ (4.29')

zerlege $\vec{a} \circ \vec{b} = \frac{1}{2}(\vec{a} \circ \vec{b} + \vec{b} \circ \vec{a}) + \frac{1}{2}(\vec{a} \circ \vec{b} - \vec{b} \circ \vec{a})$

antisym. Teil enthält das Kreuzprodukt $\vec{\omega} = \vec{a} \times \vec{b}$

$$\vec{a} \circ \vec{b} - \vec{b} \circ \vec{a} \doteq \begin{pmatrix} 0 & a_1 b_2 - a_2 b_1 & a_1 b_3 - a_3 b_1 \\ a_2 b_1 - a_1 b_2 & 0 & a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 & a_3 b_2 - a_2 b_3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \omega_3 & -\omega_2 \\ -\omega_3 & 0 & \omega_1 \\ \omega_2 & -\omega_1 & 0 \end{pmatrix}$$

$\doteq -\vec{\omega} \times \ldots$ weil...

$$(\vec a \circ \vec b - \vec b \circ \vec a)\cdot \vec c \doteq \begin{pmatrix} 0 & \omega_3 & -\omega_2 \\ -\omega_3 & 0 & \omega_1 \\ \omega_2 & -\omega_1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega_3 c_2 - \omega_2 c_3 \\ \omega_1 c_3 - \omega_3 c_1 \\ \omega_2 c_1 - \omega_1 c_2 \end{pmatrix} \doteq -\vec\omega \times \vec c$$

(4.29') (4.30) $\vec\omega = \vec a \times \vec b$

$$\vec a(\vec b \cdot \vec c) - \vec b(\vec a \cdot \vec c) \longleftarrow \text{„BAC-CAB"} \longrightarrow -(\vec a \times \vec b)\times \vec c$$

$$(\vec a \circ \vec b - \vec b \circ \vec a)_{ij} = a_i b_j - a_j b_i = \varepsilon_{ijk}(\vec a \times \vec b)_k \qquad (4.30')$$

Spezielle Tensoren

- $\hat e_{ij} = \vec e_i \circ \vec e_j \doteq i \begin{pmatrix} 0 & \overset{j}{1} & \\ - & 1 & \\ & & 0 \end{pmatrix}$ weil $(\hat e_{ij})_{kl} = (\vec e_i)_k (\vec e_j)_l = \delta_{ik}\delta_{jl}$ (4.31)

ist Basis: $\hat A = \hat e_{ij} A_{ij} \doteq A_{11}\begin{pmatrix} 1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix} + A_{12}\begin{pmatrix} 0&1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix} + \dots + A_{33}\begin{pmatrix} 0&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

damit von Objekten zu Komponenten, z.B. $\vec w = \hat A \cdot \vec v$

$$\vec e_j w_j = \hat e_{jk} A_{jk} \cdot \vec e_l v_l = \vec e_j \delta_{kl} A_{jk} v_l = \vec e_j A_{jl} v_l \leadsto w_j = A_{jl} v_l$$

- $\hat e_{j_1 j_2 \dots j_n} = \vec e_{j_1} \circ \vec e_{j_2} \circ \vec e_{j_3} \circ \dots \circ \vec e_{j_n}$ mehrfache Dyade

- $\mathbb{1} = \hat{e}_{ij}\,\delta_{ij} = \hat{f}_{ij}\,\delta_{ij} \iff \delta'_{ij} = \delta_{ij}$ drehinvariant

$\rightsquigarrow$ $sp(A) = \delta_{ij} A_{ij} = A_{ii}$ drehinvariant

- $\hat{\varepsilon} = \hat{e}_{ijk}\,\varepsilon_{ijk} = \hat{f}_{ijk}\,\varepsilon_{ijk} \iff \varepsilon'_{ijk} = \varepsilon_{ijk}$ drehinvariant

$\rightsquigarrow$ $\det(A) = \varepsilon_{ijk} A_{1i} A_{2j} A_{3k}$ drehinvariant

ε-Tensor vermittelt zwischen Vektor & antisymm. Tensor $\hat{A}$

$\hat{\varepsilon} :\ \vec{a} \longmapsto \hat{A}$ wegen $A_{ij} = \varepsilon_{ijk} a_k \iff \hat{A} = \hat{\varepsilon} \cdot \vec{a}$

und $\hat{A} \longmapsto \vec{a}$ wegen $a_i = \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} A_{jk} \iff \vec{a} = \frac{1}{2} \hat{\varepsilon} : \hat{A}$

(4.32)

$$\underline{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \iff A = \begin{pmatrix} 0 & a_3 & -a_2 \\ -a_3 & 0 & a_1 \\ a_2 & -a_1 & 0 \end{pmatrix}$$

IV.3 Hauptachsentransformation

Beh.: zu einer symmetrischen Matrix $H = H^T$
gibt es mindestens eine Drehmatrix D, so dass

(4.33) $$H' = D H D^T = \Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$$

ausgeschrieben:

$$D H D^T = \begin{pmatrix} - & \underline{f}_1^T & - \\ - & \underline{f}_2^T & - \\ - & \underline{f}_3^T & - \end{pmatrix} H \begin{pmatrix} | & | & | \\ \underline{f}_1 & \underline{f}_2 & \underline{f}_3 \\ | & | & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} - & \underline{f}_1^T & - \\ - & \underline{f}_2^T & - \\ - & \underline{f}_3^T & - \end{pmatrix} \begin{pmatrix} | & | & | \\ H\underline{f}_1 & H\underline{f}_2 & H\underline{f}_3 \\ | & | & | \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \underline{f}_1^T \cdot H \underline{f}_1 & \underline{f}_1^T H \underline{f}_2 & \cdot \\ \underline{f}_2^T \cdot H \underline{f}_1 & \cdot & \cdot \\ \underline{f}_3^T \cdot H \underline{f}_1 & \cdot & \cdot \end{pmatrix} \overset{!}{=}$$

$$\Leftrightarrow \quad \hat{H} \vec{f}_j = \lambda_j \vec{f}_j \quad \left(\text{keine } \Sigma_j\right) \quad \text{mit} \quad \vec{f}_i \cdot \vec{f}_j = \delta_{ij}$$

(4.34) Eigenwert-Problem

Eigenwert EW — Eigenvektor EV

$\exists$ davon jeweils drei ($j = 1, 2, 3$)

Beweis

A) Beträge der Eigenvektoren liegen nicht fest

→ kann normieren

B) EW verschieden ⟹ EV orthogonal:

$$\left.\begin{array}{l}\hat{H}\vec{f}_1 = \lambda_1 \vec{f}_1 \\ \hat{H}\vec{f}_2 = \lambda_2 \vec{f}_2\end{array}\right\} \Rightarrow 0 = \vec{f}_2 \cdot \left(\hat{H}\vec{f}_1 - \lambda_1 \vec{f}_1\right)$$

$\hat{H}^T = \hat{H}$

$$= \left(\hat{H}^T \vec{f}_2\right)\cdot\vec{f}_1 - \lambda_1 \vec{f}_2\cdot\vec{f}_1 = (\lambda_2 - \lambda_1)\, \vec{f}_2\cdot\vec{f}_1$$

q.e.d.

C) EW sind Lösungen einer kubischen Gleichung:

$(\hat{H} - \lambda \mathbb{1}) \cdot \vec{f} = 0$ hat Lösungen ungleich $\vec{f} = 0$ genau dann wenn

$\det(H - \lambda \mathbb{1}) = 0$ ⤳ liefert $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ als Nullstellen des „charakteristischen Polynoms"

$$P(\lambda) = \det(H - \lambda\mathbb{1}) = \begin{vmatrix} H_{11}-\lambda & H_{12} & H_{13} \\ H_{21} & H_{22}-\lambda & H_{23} \\ H_{31} & H_{32} & H_{33}-\lambda \end{vmatrix} \underset{(4.35)}{=} -\lambda^3 + (\mathrm{sp}\, H)\lambda^2 + q(H)\lambda + \det H$$

$$q(H) = \frac{1}{2}\,\mathrm{sp}(H^2) - \frac{1}{2}(\mathrm{sp}\, H)^2$$

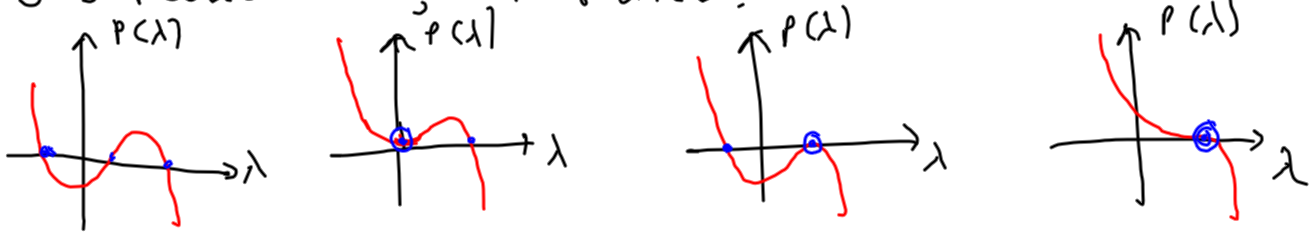
D) 4 mögliche Fälle für $H^T = H$

Diskriminante $D = sp(H)^2 - 3q(H)$

$$= \tfrac{1}{2}\left(3\, sp(H^2) - sp(H)^2\right)$$

$$= \tfrac{1}{2}(H_{11}-H_{22})^2 + \tfrac{1}{2}(H_{22}-H_{33})^2 + \tfrac{1}{2}(H_{33}-H_{11})^2 + 3\left(H_{12}^2 + H_{13}^2 + H_{23}^2\right) \geq 0$$

$\rightsquigarrow \exists$ 3 reelle EW, 4 Fälle:



E) bei Entartungen (Fälle 2-4) sind 2 EW gleich, z.B. $\lambda_1 = \lambda_2 = \bar{\lambda}$

$$\left.\begin{array}{l} \hat{H}\vec{f}_1 = \bar{\lambda}\vec{f}_1 \\ \hat{H}\vec{f}_2 = \bar{\lambda}\vec{f}_2 \end{array}\right\} \quad \hat{H}(\alpha\vec{f}_1 + \beta\vec{f}_2) = \alpha\bar{\lambda}\vec{f}_1 + \beta\bar{\lambda}f_2 = \bar{\lambda}(\alpha\vec{f}_1 + \beta\vec{f}_2)$$

$\rightsquigarrow$ jede Kombination $\alpha\vec{f}_1 + \beta\vec{f}_2$ ist EV $\rightsquigarrow \exists$ „Eigen-Ebene"

wenn alle 3 EW gleich, dann $\hat{H} = \bar{\lambda}\,\mathbb{1}$ $\rightsquigarrow$ jeder Vektor ist EV

$\rightarrow$ „Eigenraum"

IV.4 Beispiele

Tensoren 2. Stufe vermitteln lineare Abb. von Vektoren

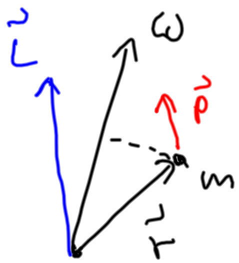
$$\vec{a} = \hat{H} \cdot \vec{u} + \vec{c} \qquad \text{(Verallg. von lineare Funktionen)}$$

Interpretation: $\vec{u}$ ist Ursache, $\vec{a}$ ist Antwort

$(H, \vec{c})$ sind Systemdaten

Beispiel A) Trägheitstensor

starrer Körper, Masse m, feste Achse $\vec{\omega}$ durch Ursprung, wird in festem Abstand von Achse gehalten (masselose Drähte)



$$\vec{L} = \vec{r} \times m(\underbrace{\vec{\omega} \times \vec{r}}_{\vec{v}}) = m\left(\vec{\omega}\, r^2 - \vec{r}\,(\vec{r}\cdot\vec{\omega})\right)$$

$$= m\left(r^2 \mathbb{1} - \vec{r} \circ \vec{r}\right) \cdot \vec{\omega} =: \hat{I} \cdot \vec{\omega} \qquad (4.36)$$

definiert Trägheitstensor $\hat{I}$ mit Komponenten

$r^2 = \vec{r}^{\,2} = \vec{r} \cdot \vec{r}$
$= x^2 + y^2 + z^2$

$$I_{ij} = m\left(r^2 \delta_{ij} - r_i r_j\right) \qquad \text{oder}$$

$$\hat{I} = mr^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - m \begin{pmatrix} xx & xy & xz \\ yx & yy & yz \\ zx & zy & zz \end{pmatrix} = m \begin{bmatrix} y^2+z^2 & -xy & -xz \\ -xy & z^2+x^2 & -yz \\ -xz & -yz & x^2+y^2 \end{bmatrix}.$$

(4.37)

$\hat{I} = \hat{I}^T$, für mehrere Massen m_α, $\alpha = 1, \ldots, N$:

$$\vec{L} = \sum_\alpha \vec{L}_\alpha = \sum_\alpha \hat{I}_\alpha \vec{\omega} =: \hat{I} \vec{\omega}$$, also

$$\hat{I} = \sum_\alpha m_\alpha \begin{pmatrix} y_\alpha^2+z_\alpha^2 & -x_\alpha y_\alpha & -x_\alpha z_\alpha \\ -x_\alpha y_\alpha & z_\alpha^2+x_\alpha^2 & -y_\alpha z_\alpha \\ -x_\alpha z_\alpha & -y_\alpha z_\alpha & x_\alpha^2+y_\alpha^2 \end{pmatrix} \qquad (4.37')$$

Eigenschaften:

- $I_{11} + I_{22} \geq I_{33}$ und zyklisch
- $I_{\vec{n}} = \vec{n} \cdot \hat{I} \cdot \vec{n} \geq 0 \iff \lambda_i \geq 0$
- $\lambda_1 + \lambda_2 = \lambda_3 \iff$ Scheibe (2-dim.)
- $\lambda_3 = 0 \iff$ Linie (1-dim.)
- Symmetrien $\iff$ Entartung von $\hat{I}$

Zeitabhängigkeit von $\vec{r}$ $\rightarrow$ $\hat{I}$ ist zeitabhängig

damit, für ein festes $\vec{\omega}$:

$$\dot{\vec{L}} = \dot{\hat{I}} \cdot \vec{\omega} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{N}$$

Drehmoment $\rightarrow$ Unwucht

Ausnahme: $\vec{\omega}$ ist Eigenvektor von $\hat{I}$:

$$\vec{L} = \hat{I} \cdot \vec{\omega} = \lambda \vec{\omega} \quad \rightsquigarrow \quad \dot{\vec{N}} = 0 \qquad (4.38)$$

λ ist zeitunabhängig

„Auswuchten"

Beispiel B) Leitfähigkeit

Ursache: $\vec{E}$-Feld, Antwort: Elektronen-Geschw. $\vec{v}$

oder: Stromdichte $\vec{j}$ = Strom/Fläche

Lineare Beziehung: $\vec{j} = \hat{\sigma} \cdot \vec{E}$ (4.39) Ohmsches Gesetz

$\hat{\sigma}$ Leitfähigkeits-Tensor

- isotropes Medium $\rightsquigarrow$ $\vec{j} \parallel \vec{E}$ $\rightsquigarrow$ $\hat{\sigma} = \sigma \cdot \mathbb{1}$ $\sim$ Zahl
- anisotropes Medium $\rightarrow$ $\exists$ Vorzugsrichtungen $\rightsquigarrow$ i.a. $\vec{j} \nparallel \vec{E}$ $\rightsquigarrow$ $\hat{\sigma}$ ist Tensor

Beispiel C: harmonische Näherung eines Potentialminimums

hier in 2 Dimensionen

2 Federn $\rightsquigarrow$ $\vec{F} = -\hat{H}\cdot\vec{r}$ (4.40) Hookesches Gesetz (Ruhelage $\vec{r}_0 = 0$)

nichtlineare Korrekturen sind von Ordnung r^2

harmonische Kraft, Vorzugsrichtungen, i.a. $\vec{F} \nparallel \vec{r}$

wie sieht das Potential aus?

zu Fuß: $F_1 = -H_{11}x - H_{12}y \overset{!}{=} -\partial_x V \rightsquigarrow V = \frac{1}{2}H_{11}x^2 + H_{12}xy + f(y)$

$F_2 = -H_{21}x - H_{22}y \overset{!}{=} -\partial_y V = -H_{12}x - f'(y)$

$\rightsquigarrow H_{12} \overset{!}{=} H_{21}$ und $f(y) = \frac{1}{2}H_{22}y^2 + c$, setze $c = 0$

also für $H^T = H$:
$$V = \frac{1}{2}H_{11}x^2 + H_{12}xy + \frac{1}{2}H_{22}y^2$$
$$= \frac{1}{2}\left(x H_{11} x + x H_{12} y + y H_{21} x + y H_{22} y\right)$$
$$= \frac{1}{2}\underline{r}^T H \underline{r} = \frac{1}{2}\vec{r}\cdot\hat{H}\cdot\vec{r} \qquad (4.41)$$

In Hauptachsenbasis: $V = \frac{1}{2}\omega_1^2 x^2 + \frac{1}{2}\omega_2^2 y^2$ weil $H = \begin{pmatrix}\omega_1^2 & 0\\ 0 & \omega_2^2\end{pmatrix} = \Lambda$

Fahrplan zur Hauptachsentransformation (3D)

① $H = H^T$?

② löse $\det(H - \lambda \mathbb{1}) = 0$ nach λ

sortiere die 3 Lösungen $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3$

Entartung?

③ Proben: $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = \mathrm{Sp}(H)$, $\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = \det(H)$

④ zu jedem EW λ_j löse

$(H - \lambda_j \mathbb{1}) \underline{v}_j = 0$ nach $\underline{v}_j$ $\rightsquigarrow$ $\{\vec{v}_j\}$ sind EV

[kann eine nichtnull Komponente von $\underline{v}_j$ frei wählen]

⑤ Probe der Orthogonalität:

$\vec{v}_j \cdot \vec{v}_k = 0$ für $j \neq k$

shortcut: $\vec{f}_3 = \vec{f}_1 \times \vec{f}_2$

bei Entartung: orthogonale Linearkombination wählen

⑥ normiere die EV: $\vec{f}_j = \vec{v}_j / v_j$

wechsle evtl. ein Vorzeichen ($\vec{f}_3 \to -\vec{f}_3$) so daß Rechtssystem

⑦ notiere Resultat in Form $H' = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$ & $D = \begin{pmatrix} - & \underline{f}_1 & - \\ - & \underline{f}_2 & - \\ - & \underline{f}_3 & - \end{pmatrix}$